

# VREMENSKO-FREKVENCIJSKA TRANSFORMACIJA VIŠEG REDA ZASNOVANA NA APROKSIMACIJI PRVOG IZVODA FAZE

Miloš Brajović, Miloš Daković, Ljubiša Stanković, *Elektrotehnički fakultet – Podgorica, milosb@ac.me, milos@ac.me*

**Sadržaj** – U radu je predložena vremensko-frekvencijska reprezentacija višeg reda zasnovana na aproksimaciji prvog izvoda faze metodom konačnih razlika. Ova reprezentacija u vremensko-frekvencijskoj ravni idealno koncentriše signale čija se faza može predstaviti polinomom reda manjeg od šest. Dati su primjeri koji eksperimentalno potvrđuju tačnost teorijskih rezultata. Pokazano je da i u slučaju sinusoidalno frekvencijski moduliranih signala ova reprezentacija omogućava postizanje visoke koncentracije, znatno kvalitetnije od rezultata koji se postižu primjenom spektrograma i Wigner-ove distribucije.

## 1. UVOD

Fourier-ova transformacija (FT) [1, 5, 6] je široko korišćen alat za analizu signala čiji se spektralni sadržaj ne mijenja tokom vremena (stacionarni signali). U slučaju signala čiji je spektralni sadržaj vremenski promjenjiv, iako fazna karakteristika Fourier-ove transformacije sadrži informacije o vremenskoj raspodjeli spektralnih komponenti, ove informacije je veoma teško koristiti [1, 2]. Fourier-ova transformacija, dakle, ne daje informacije o trenucima pojavljivanja i trajanju komponenti u slučaju signala čiji je spektralni sadržaj vremenski promjenljiv (nestacionarni signali). Takođe, u slučaju multikomponentnih signala [1, 2] FT ne može dati informaciju o širini spektra pojedinačnih komponenti. Ova ograničenja dovela su do razvoja vremensko-frekvencijske (TF) analize signala [1, 2, 7]. Ona obezbjeđuje brojne tehnike i alate za analizu i obradu signala u vremenskom i u frekvencijskom domenu istovremeno.

U teoriji i praksi su definisane brojne vremensko-frekvencijske reprezentacije [1, 2, 3, 7], od kojih je svaka pogodna za rješavanje određene klase problema, ali do danas nije definisana neka koja predstavlja univerzalno rješenje problema koji se javljaju u analizi i obradi nestacionarnih signala. Jedan od aktuelnih i otvorenih problema ove oblasti jeste i definisanje reprezentacija koje će što je moguće bolje koncentrisati komponente signala u vremensko-frekvencijskoj ravni [1, 2, 3, 8, 9].

Najjednostavnija vremensko-frekvencijska reprezentacija je spektrogram definisan kao:

$$SPEC(t, \Omega) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) w(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (1)$$

Poznato je da svako odstupanje trenutne frekvencije od konstante kod spektrograma izaziva rasipanje (smanjenje koncentracije).

Pored spektrograma, jedna od najpoznatijih vremensko-frekvencijskih reprezentacija je Wigner-ova distribucija. Ona idealno koncentriše signale čija faza predstavlja polinom do reda dva, dok se u slučaju faze koja predstavlja polinom trećeg ili višeg reda, javlja rasipanje oko idealne

koncentracije, poznato kao inner interferences [1, 2]. Budući da do danas nije definisana reprezentacija koja idealno koncentriše komponente svih vrsta signala, aktuelno je istraživanje novih reprezentacija koje omogućavaju poboljšavanje koncentracije za određene klase signala.

U radu je predložena vremensko-frekvencijska reprezentacija višeg reda, koja idealno koncentriše signale čija se faza može predstaviti polinomom reda manjeg od šest. Ova reprezentacija je izvedena na osnovu teorijskog pristupa koji omogućava definisanje novih TF reprezentacija na bazi aproksimacije prvog izvoda faze – trenutne frekvencije metodom konačnih razlika.

Rad je organizovan na način koji slijedi. Teorijski pristup definisanju vremensko-frekvencijskih reprezentacija na bazi aproksimacije prvog izvoda faze opisan je u drugoj sekciji. Predložena reprezentacija i njene osnovne karakteristike opisani su u trećoj sekciji. U četvrtoj sekciji dati su primjeri koji demonstriraju razmatranja iz prethodnih sekcija.

## 2. ESTIMACIJA PRVOG IZVODA FAZE SIGNALA KAO OSNOVA ZA DEFINISANJE VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH REPREZENTACIJA

Posmatrajmo generalnu formu monokomponentnog signala [1, 2, 4]:

$$x(t) = A(t)e^{j\phi(t)}, \quad (2)$$

i pretpostavimo da su varijacije amplitude signala značajno manje u odnosu na varijacije faze, odnosno,  $|A'(t)| \ll |\phi'(t)|$ . Idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija (ITF) [2] idealno koncentriše energiju signala u vremensko-frekvencijskoj ravni duž njegove trenutne frekvencije (IF) [1, 2, 8, 9] definisane kao prvi izvod faze signala po vremenu, odnosno:

$$\Omega(t) = \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (3)$$

Dakle, u skladu sa prethodnom definicijom trenutne frekvencije, idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija bi trebalo da na trenutnoj frekvenciji predstavlja Dirakov impuls [2, 5], odnosno, njena definicija je [2]:

$$ITF(t, \Omega) = 2\pi |A(t)|^2 \delta(\Omega - \phi'(t)). \quad (4)$$

Jedan od aktuelnih problema u vremensko-frekvencijskoj analizi jeste pronalaženje takve reprezentacije, koja je po svojim karakteristikama što je moguće bliža ITF. Problem se može intrerpretirati i na sljedeći način: potrebno je pronaći transformaciju signala koja će se koristiti za dobijanje reprezentacije oblika (4). Lako se određuje da je ITF Fourier-ova transformacija funkcije oblika:

$$R(t, \tau) = |A(t)|^2 e^{j\phi'(t)\tau}. \quad (5)$$

Primjeri poznatih distribucija: Wigner-ove i Rihaczek-ove [1, 2] ilustruju opravdanost ovakvog teorijskog pristupa. Poznato je da se prvi izvod može računati na sljedeći način:

$$\Omega'(t) \approx \frac{\phi(t) - \phi(t-\tau)}{\tau} = \frac{d\phi(t)}{dt} + O(\phi''(\tau)) \quad (6)$$

gdje  $O(\phi''(\tau))$  označava da je greška u aproksimaciji prvog izvoda faze reda veličine drugog izvoda faze. Ako izraz (6) uvrstimo u (5), dobijamo funkciju oblika:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= |A(t)|^2 e^{j\phi'(t)\tau} = |A(t)|^2 e^{j\frac{\phi(t) - \phi(t-\tau)}{\tau}\tau} = \\ &= A(t)e^{j\phi(t)} (A(t)e^{j\phi(t-\tau)})^* = x(t)x^*(t-\tau), \end{aligned}$$

čija je FT po promjenljivoj  $\tau$  zapravo Richaczek-ova distribucija. Kao što je poznato [1, 2, 3], ova distribucija se već kod signala čija je faza polinom drugog reda karakteriše rasipanjem oko trenutne frekvencije, što je posljedica greške u aproksimaciji prvog izvoda faze.

Wigner-ova distribucija može se dobiti istim postupkom, na osnovu sljedeće aproksimacije prvog izvoda faze:

$$\Omega(t) \approx \frac{\phi(t + \frac{\tau}{2}) - \phi(t - \frac{\tau}{2})}{\tau} = \frac{d\phi(t)}{dt} + O(\phi'''(\tau)) \quad (7)$$

Ponavljajući isti postupak, dobijamo:

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= A^2(t)e^{j\phi'(t)\tau} = A^2(t)e^{j\frac{\phi(t+\frac{\tau}{2}) - \phi(t-\frac{\tau}{2})}{\tau}\tau} = \\ &= A(t)e^{j\phi(t+\frac{\tau}{2})} (A(t)e^{j\phi(t-\frac{\tau}{2})})^* = x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) \end{aligned}$$

Fourier-ova transformacija prethodnog izraza predstavlja Wigner-ovu distribuciju:

$$WD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad (8)$$

Uvođenjem prozora po  $\tau$  u prethodnoj formuli, dobija se pseudo-Wigner-ova distribucija (PWD), oblika:

$$PWD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\frac{\tau}{2}) x(t + \frac{\tau}{2}) x^*(t - \frac{\tau}{2}) e^{-j\Omega\tau} d\tau \quad (9)$$

Kako iz formule (7) vidimo da je sada greška u aproksimaciji prvog izvoda faze reda veličine trećeg izvoda faze, postaje jasno da će Wignerova distribucija za signale čija se faza može predstaviti polinomom najviše drugog reda, kao što je poznato u literaturi [1, 2], dati idealnu koncentraciju, dok će za slučaj signala čija je faza polinom reda većeg od dva nastupiti očekivano rasipanje koncentracije.

### 3. PREDLOŽENA VREMENSKO-FREKVENCIJSKA REPREZENTACIJA VIŠEG REDA

Navedena razmatranja poslužiće nam kao motivacija za posmatranje još jedne aproksimacije prvog izvoda faze, u cilju definisanja distribucije koja bi mogla dati idealnu koncentraciju i za slučaj signala čija se faza može predstaviti polinomima do reda pet, što proširuje klasu signala za koje se mogu dobiti izuzetno dobre koncentracije u vremensko-

frekvencijskoj ravni, u odnosu na onaj kod Wignerove distribucije. Međutim, ova poboljšanja biće na račun povećanja složenosti distribucije i problema koje to sa sobom može nositi. Posmatrajmo precizniju estimaciju prvog izvoda faze:

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \phi'(t) \approx \\ &\approx \frac{\phi(t - \tau/6) - 8\phi(t - \tau/12) + 8\phi(t + \tau/12) - \phi(t + \tau/6)}{\tau} = \quad (10) \\ &= \frac{d\phi(t)}{dt} + O(\phi^{(5)}(\tau)) \end{aligned}$$

Analogno prethodnim razmatranjima, dobija se funkcija:

$$R(t, \tau) = x(t - \frac{\tau}{6})x^{*8}(t - \frac{\tau}{12})x^8(t + \frac{\tau}{12})x^*(t + \frac{\tau}{6}), \quad (11)$$

čija Fourier-ova transformacija daje ITF, odnosno, dobija se idealna koncentracija duž trenutne frekvencije, kod onih signala čija je faza polinom maksimalno petog reda. Dobija se, dakle, vremensko-frekvencijska reprezentacija definisana sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} PD(t, \Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \frac{\tau}{6})x^{*8}(t - \frac{\tau}{12})x^8(t + \frac{\tau}{12})x^*(t + \frac{\tau}{6}) e^{-j\Omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (12)$$

Budući da u realizacijama treba razmatrati konačno kašnjenje  $\tau$ , definišimo formu ove TF reprezentacije sa funkcijom prozora  $w(\tau)$  [1, 2, 5, 6], ograničenog trajanja:

$$\begin{aligned} PD(t, \Omega) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} w(\frac{\tau}{12}) x(t - \frac{\tau}{6}) x^{*8}(t - \frac{\tau}{12}) x^8(t + \frac{\tau}{12}) x^*(t + \frac{\tau}{6}) e^{-j\Omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

Sada ćemo naći njenu diskretnu formu. Uvedimo smjenu  $v = \tau/12$ . Izraz (13) postaje:

$$\begin{aligned} PD(t, \Omega) &= \\ &= 12 \int_{-\infty}^{\infty} w(v) x(t - 2v) x^{*8}(t - v) x^8(t + v) x^*(t + 2v) e^{-j12\Omega v} dv \end{aligned}$$

Diskretizacija po vremenu se obavlja odabiranjem signala  $x(t)$ , tako da je  $t = m\Delta t$ , a takođe je neophodno diskretizovati i promjenljivu  $\tau = n\Delta t$ :

$$\begin{aligned} PD(n\Delta t, \Omega) &= 12 \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m\Delta t) x((n-2m)\Delta t) \times \\ &\times x^{*8}((n-m)\Delta t) x^8((n+m)\Delta t) x^*((n+2m)\Delta t) e^{-j12\Omega m\Delta t}, \end{aligned} \quad (14)$$

gdje je  $\Delta t$  period odabiranja. Nakon uvođenja odgovarajućih smjena za signale iz prethodne formule, i imajući u vidu definiciju diskretne frekvencije [5, 6]  $\omega = \Omega\Delta t$ , dolazi se do:

$$\begin{aligned} PD(n, \omega) &= 12 \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) x(n-2m) \times \\ &\times x^{*8}(n-m) x^8(n+m) x^*(n+2m) e^{-j12\omega m}, \end{aligned} \quad (15)$$

što predstavlja formu predložene TF reprezentacije za diskretne signale (discrete-time). Uočimo da je  $PD(n, \omega)$

periodična po  $\omega$  sa periodom  $\pi/6$ , i da period odabiranja ovdje treba da bude, u cilju sprečavanja aliasing-a [5, 6]  $\Delta t = 1/(12f_{\max})$ , gdje je  $f_{\max}$  maksimalna učestanost u spektru signala  $x(n)$ . To znači da će sa funkcijom prozora istog trajanja kao kod Wigner-ove distribucije,  $PD(n, \omega)$  zahtijevati šest puta više odbiraka. Diskretizujući frekvenciju pomoću  $\omega = \pi k / 6N$ , dobijamo diskretnu formu predložene reprezentacije:

$$PD(n, k) = 12 \sum_{m=-6N}^{6N-1} w(m)x(n-2m) \times \times x^{*8}(n-m)x^8(n+m)x^*(n+2m)e^{\frac{j2\pi mk}{N}} \quad (16)$$

Navedimo neke od osobina predložene reprezentacije. Prije svega, ona je realna, jer za funkciju  $R(t, \tau)$  iz (11) važi svojstvo Hermitske simetrije, to jest  $R(t, \tau) = R^*(t, -\tau)$ , što je lako pokazati, a poznato je da je Fourier-ova funkcije sa ovim svojstvom čisto realna funkcija. Zato možemo pisati:

$$PD^*(t, \Omega) = PD(t, \Omega)$$

Još jedno bitno svojstvo jeste da za signal pomjeren u vremenu,  $x_1(t) = x(t-t_0)$ , važi da se dobija reprezentacija pomjerenja za istu vrijednost u vremenu:

$$PD_{x_1}(t, \Omega) = PD_x(t-t_0, \Omega).$$

Lako se pokazuje i da za signal  $x_1(t) = x(t)\exp(j\Omega_0 t)$  važi sljedeće svojstvo (pomjeranje po frekvenciji):

$$PD_{x_1}(t, \Omega) = PD_x(t, \Omega - \Omega_0).$$

Napomenimo da predložena reprezentacija ne zadovoljava marginalne uslove [1, 2, 3].

#### 4. PRIMJERI

Primjer 1. Posmatra se kompleksni signal sa polinomijalnom fazom:

$$x(t) = \exp(j32\pi t^4 - j32\pi t^2 + j10\pi t), \quad (17)$$

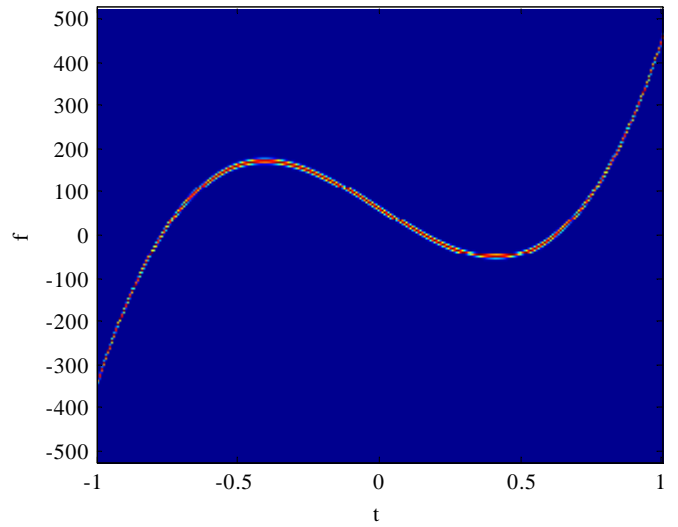
u intervalu  $-1s \leq t \leq 1s$ . Signal je odabran sa periodom odabiranja  $\Delta t = 0.001$  gdje je korišćen Hanning-ov [5, 6] prozor širine 0.2s. Budući da je faza ovog signala polinom četvrtog reda, na osnovu izložene teorije očekuje se idealna koncentracija duž trenutne frekvencije. Na slici 1. prikazana je  $PD(\Omega, t)$  ovog signala.

Primjer 2. Posmatra se sinusoidalno modulisani signal:

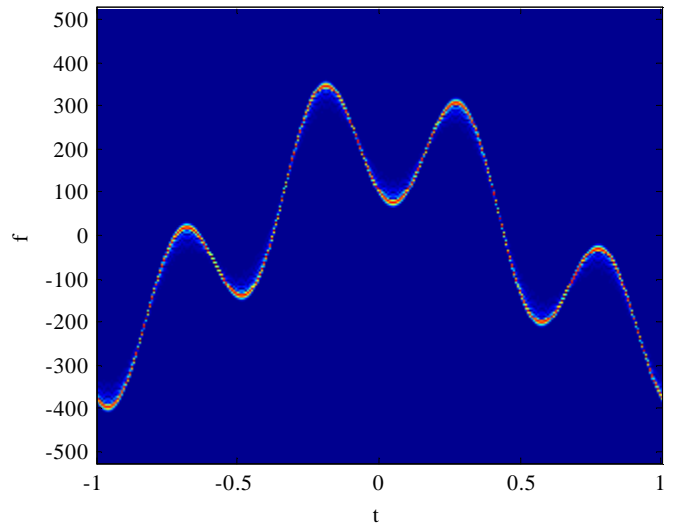
$$x(t) = \exp(j12\pi \sin(\pi t) + j2\pi \cos(4\pi t + \pi/3)) \quad (18)$$

u intervalu  $-1s \leq t \leq 1s$ . Signal je odabran sa periodom odabiranja  $\Delta t = 0.001s$ , a zatim je izračunata njegova  $PD(\Omega, t)$ , prikazana na slici 2. Korišćen je Hanning-ov prozor trajanja 0.2s. Predložena reprezentacija i u ovom slučaju jako dobro koncentriše signal duž trenutne frekvencije. U cilju poređenja kvaliteta koncentracije, na slici 3. prikazan je spektrogram (1) istog signala pododabranog sa faktorom 12, gdje je korišćen Hanning-ov prozor trajanja 0.08s, i pseudo-Wigner-ova distribucija (9) istog signala

pododabranog sa faktorom 6, uz korišćenje Hanning-ovog prozora dužine 0.2s.



Slika 1.  $PD(t, \Omega)$  signala čija je faza polinom četvrtog reda iz prvog primjera. Vrijeme je zadato u sekundama, a frekvencija u radijanima u sekundi.

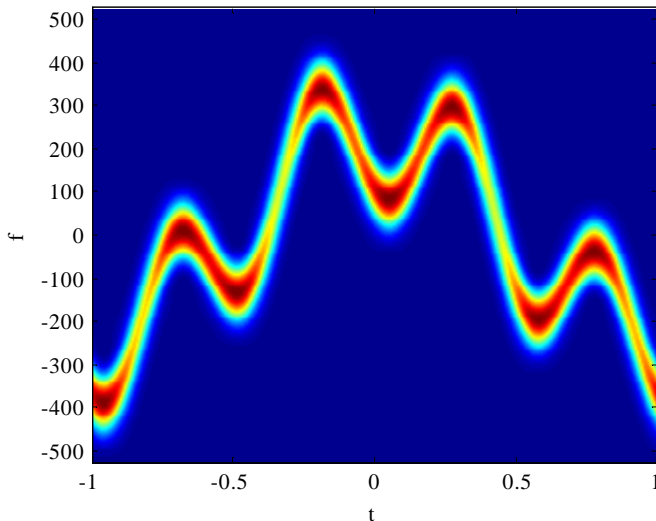


Slika 2.  $PD(t, \Omega)$  sinusoidalno modulisanog signala iz drugog primjera.

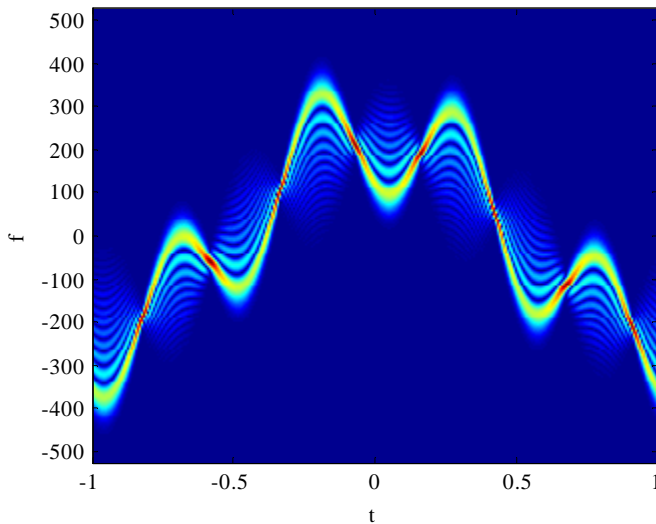
Ovo je slučaj signala čija faza ne može biti predstavljena polinomom konačnog reda, tako da ne očekujemo idealnu reprezentaciju signala. Sa slike 2 se ipak vidi da je ova reprezentacija daje veću koncentraciju u odnosu na spektrogram i Wigner-ovu distribuciju. Na slici 2 se može uočiti rasipanje koncentracije, koje je reda veličine petog izvoda faze. Za posmatrani signal ovaj izvod dat je formulom:  $\phi^{(5)}(t) = 12\pi^6 \cos(\pi t) - 2048\pi^6 \sin(4\pi t + \pi/3)$ .

Najveće rasipanje dobiće se kada je  $|\phi^{(5)}(t)|$  maksimalan, jer niži izvodi faze nemaju uticaja na rasipanje.

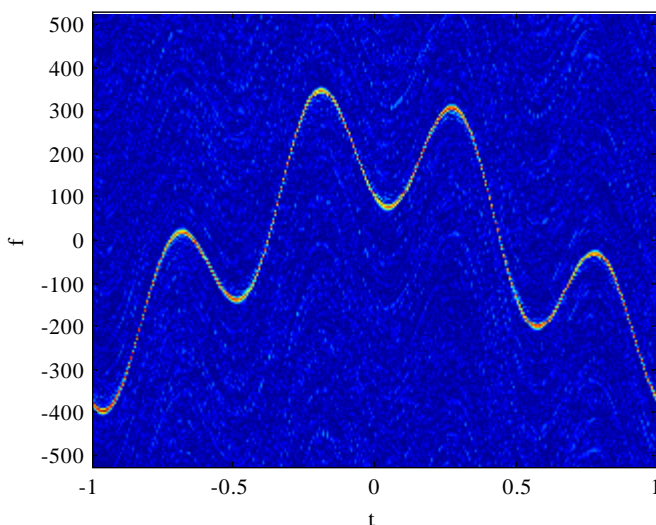
Primjer 3. Posmatra se signal (17). Dodat je kompleksni bijeli Gausov šum srednje vrijednosti nula. Varijansa realnog i imaginarnog dijela šuma su jednake, a odnos signal šum je 20dB. Izračunata  $PD(t, \Omega)$  prikazana na slici 5. Korišćen je Hanning-ov prozor trajanja 0.25 s.



Slika 3. Spektrogram sinusoidalno modulisanog signala iz drugog primjera.



Slika 4. PWD sinusoidalno modulisanog signala iz drugog primjera.



Slika 5.  $PD(t, \Omega)$  sinusoidalno modulisanog signala iz drugog primjera zašuljenog bijelim šumom.

Na slici 5. mogu se uočiti komponente koje predstavljaju kros-članove [1, 2, 3] između korisnog signala i šuma. One su posljedica visokog reda reprezentacije.

## 5. ZAKLJUČAK

U radu je predložena vremensko-frekvencijska reprezentacija višeg reda koja idealno koncentriše signale čija se faza može predstaviti polinomom maksimalno petog reda. Izložena teorija je potvrđena eksperimentalnim rezultatima, a izvršeno je i eksperimentalno poređenje sa spektrogramom i Wigner-ovom distribucijom za slučaj sinusoidalno modulisanog signala. Ponašanje ove reprezentacije u uslovima bijelog šuma je eksperimentalno provjereno.

## LITERATURA

- [1] L. Cohen, "Time-Frequency distributions - a review", *Proc. IEEE*, vol 77, no.7, pp. 941-981, July 1989.
- [2] B. Boashash, "Time-frequency signal analysis and processing : a comprehensive reference", *Elsevier Publications*, 2003.
- [3] LJ. Stankovic, "Highly concentrated time-frequency distribution: Pseudo quantum signal representation," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol.5, No.3, Mar.1997, pp.543-551
- [4] LJ. Stanković, V. Ivanović, Z. Petrović, "Unified approach to the noise analysis in the spectrogram and the Wigner distribution", *Annales des telecom.*, vol.51, No.11-12, pp. 585-594, Nov./Dec. 1996
- [5] A.Papoulis, *Signal analysis*, McGraw Hill, New York, 1977.
- [6] Lj. Stanković: *Digitalna obrada signala*, Naučna knjiga, 1990.
- [7] Lj. Stanković: "An analysis of some time-frequency and time-scale distributions" *Annales des Telecommunications*, no.9/10, Sept./Oct. 1994, pp. 519-538
- [8] LJ. Stankovic, "A method for improved energy concentration in the time-frequency analysis of multicomponent signals using the L-Wigner distribution", *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol-43, No.5, May.1995, pp.1262-1269.
- [9] LJ. Stankovic, "A time-frequency distribution concentrated along the instantaneous frequency," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol-3, No.3, Mar.1996, pp.89-91

**Abstract** – Higher order time-frequency representation based on first derivative approximation is proposed. In time-frequency plane, this representation ideally concentrate signals whose phase is a polynomial of order less than six. Theoretical considerations are confirmed with experimental results. It is experimentally shown that even for sinusoidally modulated signals proposed representation gives better results than spectrogram and Wigner distribution.

## HIGHER ORDER TIME-FREQUENCY REPRESENTATION BASED ON FIRST ORDER DERIVATIVE APPROXIMATION

Miloš Brajović, Miloš Daković, Ljubiša Stanković