

RAZMATRANJE NUMERIČKE IMPLEMENTACIJE NEKIH VREMENSKO-FREKVENCIJSKIH REPREZENTACIJA I NJIHOVIH ROBUSTNIH FORMI ON NUMERICAL IMPLEMENTATION OF SOME TIME-FREQUENCY REPREZENTATIONS AND THEIR ROBUST FORMS

Miloš Brajović, Aleksandar Drašković, Miloš Daković, Ljubiša Stanković, *Elektrotehnički fakultet Podgorica*

Sadržaj: U radu su analizirane tehnike numeričke implementacije Wigner-ove distribucije, Polinomijalne Wigner-ove distribucije i polinomijalne reprezentacije višeg reda primjenom interpolacionih tehnika. Za numeričku implementaciju Polinomijalne Wigner-ove distribucije predložena je tehnika linearne interpolacije u cilju dobijanja nepostojećih vrijednosti odbiraka u vremenskom domenu neophodnih za njeno izračunavanje. Izvršena je i realizacija robustnih formi ovih reprezentacija i kroz primjere pokazana njihova numerička ispravnost.

Abstract: Techniques for numerical implementation of Wigner distribution, Polynomial Wigner distribution and higher order polynomial distribution are analyzed. For numerical implementation of Polynomial Wigner distribution, in order to obtain signal values needed for its calculation, a linear interpolation approach is proposed. Robust forms of these representations have been realized and illustrated through numerical examples.

1. UVOD

Fourier-ova transformacija, iako pogodna za analizu stacionarnih signala, pokazuje brojne nedostatke u analizi i obradi nestacionarnih signala. Stoga su razvijene brojne tehnike i alati vremensko-frekvencijske (TF) analize, koji omogućavaju analizu i obradu takvih signala [1, 2]. U poznate vremensko-frekvencijske reprezentacije (TFR) spadaju: Short-time Fourier-ova transformacija, spektrogram, Wigner-ova distribucija, S-metod, brojne TFR višeg reda [1, 2] i druge.

Dok su Wigner-ova distribucija (WD) i polinomijalna reprezentacija višeg reda (PD) [1, 9] relativno jednostavne za numeričku implementaciju, Polinomijalna Wigner-ova distribucija (PWD) iziskuje posebnu primjenu interpolacionih tehnika, budući da su usljed necjelobrojnih vrijednosti vremenskog kašnjenja potrebne vrijednosti signala koje se teško mogu dobiti čak i izuzetno visokim stepenom preodabiranja.

Teorijski i praktično interesantan scenario jeste kada su dostupni samo diskretni odbirci signala (zašumljeni, ili nezašumljeni), ali ne i njegova analogna forma, odnosno, nije moguće podešavati periodu odabiranja u cilju dobijanja neophodnog broja odbiraka (poznat je samo izlaz iz A/D konvertora). Tada je nedostajuće vrijednosti signala jedino moguće dobiti interpolacionim tehnikama na osnovu dostupnih odbiraka. Ovakav scenario biće analiziran za slučaj WD, PWD i PD.

U zašumljenim uslovima analiza i obrada signala pomoću TFR je otežana, pa se stoga primjenjuju različite tehnike čiji je cilj smanjenje negativnog uticaja šuma koji zahvata analizirane signale. Spomenuti šumovi predstavljaju slučajne procese različitih statističkih karakteristika. Veoma često

teorijski analizirani i u praksi zastupljeni šumovi su Gauss-ov šum, impulsni šum i njihove kombinacije. Efikasnost tehnika koje su razvijene u cilju smanjenja negativnog uticaja šuma zavisi upravo od njegovih statističkih karakteristika. Ovakve tehnike opisane su u [1-2, 4-7]. U prethodno navedenom slučaju, dostupni su samo zašumljeni odbirci signala. Kada se vrši njihova interpolacija, vrši se i interpolacija vrijednosti šuma, tako da se u interpoliranom signalu mora javiti obojeni šum [1, 2, 9]. Posebna pažnja biće posvećena robustnim formama primijenjenim nad implementiranim reprezentacijama. Teorijska razmatranja u radu potkrijepljena su numeričkim rezultatima.

2. DEFINICIJA REPREZENTACIJA I ROBUSTNE ANALIZE

Wigner-ova distribucija [1, 2] definiše se kao:

$$WD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{\tau}{2}\right) w^*\left(-\frac{\tau}{2}\right) x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (1)$$

WD idealno koncentriše linearno frekvencijski modulisanu signale, dok se u slučaju nelinearno frekvencijski modulisanih signala [1, 2, 3] koncentracija signala pogoršava, uz dodatnu pojavu poznatu pod nazivom *inner interferences* [1, 2, 8]. Stoga postoji motivacija za razvoj novih TFR kod kojih su ovi nedostaci manje izraženi. Za razliku od linearnih TFR, kod WD i TFR višeg reda postoji negativna pojava kros komponenti u slučaju multikomponentnih signala [1, 2, 8].

Pokazuje se da se diskretna Wigner-ova distribucija može napisati u sljedećem obliku:

$$WD(n, k) = \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} w(m) w(-m) x(n+m) x^*(n-m) e^{-j4\pi mk/N}, \quad (2)$$

gdje $w(m)$ predstavlja funkciju prozora. Ovakva implementacija Wigner-ove distribucije iziskuje preodabiranje signala u vremenu sa faktorom 2, odnosno korišćenje dva puta manje periode odabiranja od maksimalne teorijske vrijednosti [1]. Međutim, biće pokazano da nije uvijek moguće koristiti željenu veličinu periode odabiranja.

U cilju poboljšanja koncentracije signala razvijena je TFR višeg reda, koja idealno koncentriše signale čija je faza polinom reda manjeg od pet [1, 8]. Ova TFR definisana je kao:

$$PD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{\tau}{12}\right) x\left(t - \frac{\tau}{6}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{12}\right) x^8\left(t + \frac{\tau}{12}\right) x^*\left(t + \frac{\tau}{6}\right) e^{-j\Omega\tau} d\tau, \quad (3)$$

dok je njega diskretna forma data sljedećom relacijom:

$$PD(n, k) = 12 \sum_{m=-6N}^{6N-1} w(m) x(n-2m) \times x^*(n-m) x^8(n+m) x^*(n+2m) \exp(-j2\pi mk / N) \quad (4)$$

Ovakva implementacija podrazumijeva preodabiranje signala u vremenu sa faktorom 12, odnosno, korišćenje 12 puta manje periode odabiranja od maksimalne teorijske vrijednosti. I pored pogodnosti koje pruža u pogledu koncentracije signala, veliki nedostatak ove reprezentacije jeste numerička složenost u praktičnim implementacijama, i izražena pojava kros komponenti.

Sličan je razlog za uvođenje Polinomijalne Wigner-ove distribucije [1, 3], definisane kao:

$$PWD(t, \Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t + 0.675\tau) x^{*2}(t - 0.675\tau) \times x^*(t + 0.85\tau) x(t - 0.85\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau. \quad (5)$$

Njenu diskretnu formu, zbog koeficijenata uz kašnjenja τ nije moguće odrediti na jednostavan način (neophodna je upotreba teorijski i praktično neupotrebljivog stepena preodabiranja). Stoga se otvara pitanje načina interpolacije nedostajućih vrijednosti. Naglasimo da i ova reprezentacija, pored pogodnosti koje pruža u pogledu koncentracije signala u TF ravni, pokazuje nedostatke distribucija višeg reda (složenost, kros komponente).

Za analizu nestacionarnih signala zašumljenih impulsnim šumom razvijena je tzv. robustna TF analiza, zasnovana na robustnoj Fourier-ovoj transformaciji korišćenjem tzv. median pristupa i L-statistike [1, 5-8]. Ovdje ćemo razmatrati robustnu formu sa median pristupom na primjeru Wigner-ove distribucije. Pokazuje se da se robustna forma WD, kod koje je smanjen negativan uticaj impulsnog šuma u odnosu na klasičnu WD, može predstaviti sljedećom relacijom:

$$WD(n, k) = \text{median}_{n \in \{-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1\}} \{ \text{Re} \{ x(n+m) x^*(n-m) e^{-j4\pi nk / N} \} \}, \quad (6)$$

dok se sama WD može tumačiti kao kao estimacija srednje vrijednosti (čime je sama po sebi robustna na Gauss-ov šum). Drugim riječima, teorijski, klasična WD (definisana kao srednja vrijednost) predstavlja ML (maximum likelihood)

estimator za Gauss-ov šum, dok median Wigner-ova distribucija predstavlja ML estimator za impulsni šum [1, 4-7].

Signali često nijesu oštećeni samo čistim Gauss-ovim ili čistim impulsnim šumom, već i njihovim kombinacijama. Kod Wigner-ove distribucije njena kvadratna forma uzrokuje da i kada je šum polaznog signala Gauss-ov, rezultujući šum je kombinacija Gauss-ovog i Laplace-ovog (impulsnog) šuma [1, 3-7]. Kod preostale dvije opisane reprezentacije, zbog visokog reda signala, ova situacija je još složenija. Jasno je da se i u slučaju Gauss-ovog šuma koji zahvata signal u ovim reprezentacijama moraju pojaviti komponente šuma impulsne prirode. Ova činjenica opravdava značaj robustne analize ovih reprezentacija.

3. NUMERIČKA IMPLEMENTACIJA

Pretpostavimo da je dat diskretni signal $x(n)$. Pretpostavimo da nije moguće vršiti preodabiranje signala uzimanjem vrijednosti analognog signala korišćenjem manje periode odabiranja. Tada je pristup implementaciji ranije spomenutih reprezentacija bitno drugačiji.

A) *Implementacija Wigner-ove distribucije i reprezentacije višeg reda (PD)*. Pri definisanju diskretne forme WD naglašeno je da je neophodno preodabrati signal sa dva puta manjom periodom odabiranja. Pod navedenom pretpostavkom ovo nije moguće uraditi, pa se stoga pristupa interpolaciji nedostajućih vrijednosti signala. Poznato je da se dodavanjem nula u frekvencijskom domenu može izvršiti interpolacija vrijednosti signala u vremenskom domenu [1, 2, 10]. Ovo znači da je u slučaju WD nepohodno dodati N nula na odgovarajućim pozicijama u frekvencijskom domenu, gdje je N dužina prozora u Wigner-ovoj distribuciji. Dodavanje nula biće izvršeno korišćenjem funkcije ZEROPAD(\mathbf{x}, M), definisane za slučaj prozora sa neparnim brojem odbiraka na sljedeći način:

$$\text{ZEROPAD}(\mathbf{x}, M) = \begin{cases} x(k), & |k| \leq (N-1)/2 \\ 0, & \text{ostalo } k \end{cases}, \quad (7)$$

gdje niz \mathbf{x} predstavlja niz vrijednosti signala $x(n)$ obuhvaćenih funkcijom prozora koja je centrirana oko posmatranog trenutka n , a $M > N$ predstavlja broj željenih tačaka interpoliranog signala. I za slučaj WD i za slučaj PD očekivano je da je M paran broj. Frekvencijski indeksi uzimaju vrijednosti $k = 0, \pm 1, \dots, \pm M/2 - 1$. U slučaju prozora sa parnim brojem odbiraka, dodavanje nula se može izvršiti nešto drugačije:

$$\text{ZEROPAD}(\mathbf{x}, M) = \begin{cases} x(k), & |k| \leq N/2 - 1 \\ x(-N/2), & k = \pm N/2, \\ 0, & \text{ostalo } k \end{cases}, \quad (8)$$

Računanje Wigner-ove distribucije (1) i distribucije (3) za jedan diskretni trenutak n može se objediniti sljedećim algoritmom:

Korak 1: računa se DFT svih neophodnih signala;

Korak 2: vrši se dodavanje nula do potrebnog broja odbiraka ($2N$ za Wigner-ovu distribuciju i $12N$ za distribuciju (2), gdje je N dužina prozora), primjenom opisane funkcije ZEROPAD;

Korak 3: Inverznom DFT dobijaju se interpolirani signali u diskretnom vremenskom domenu;

Korak 4: računa se DFT po formuli (1), odnosno (3) za odgovarajuću reprezentaciju.

B) U slučaju polinomijalne Wigner-ove distribucije problem numeričke implementacije je značajno složeniji. Razlog za to stoji u činjenici da se kašnjenja τ množe sa realnim koeficijentima 0.675 i 0.85. Budući da je dat diskretni signal $x(n)$ za koji ne postoje vrijednosti odbiraka na potrebnim pozicijama, a koeficijenti koji množe kašnjenja su realni brojevi koji nemaju malu vrijednost najmanjeg zajedničkog sadržaoca, direktno preodabiranje u domenu diskretne Fourier-ove transformacije također ne može dati tačne vrijednosti čak ni za izuzetno veliki broj tačaka [3]. Ovakav način preodabiranja je numerički i praktično neefikasan. Stoga su razmatrane varijante sa preodabiranjem u manjem broju tačaka [3].

Pristup koji se predlaže u ovom radu jeste linearna interpolacija vrijednosti signala u vremenskom domenu. Kao što će biti ilustrovano primjerom, ovaj numerički jednostavniji koncept daje zadovoljavajuće rezultate. Budući da su sve pozicije originalnog signala cjelobrojne, linearna interpolacija može biti obavljena po formuli:

$$x(i) + (x(i+1) - x(i))\alpha \quad (9)$$

gdje i predstavlja vrijednost i -tog odbirka signala, a koeficijent α predstavlja rastojanje vrijednosti koju je potrebno interpolirati, od i -tog odbirka signala.

Računanje Polinomijalne Wigner-ove distribucije za jedan diskretni trenutak n može se ukratko opisati sljedećim algoritmom:

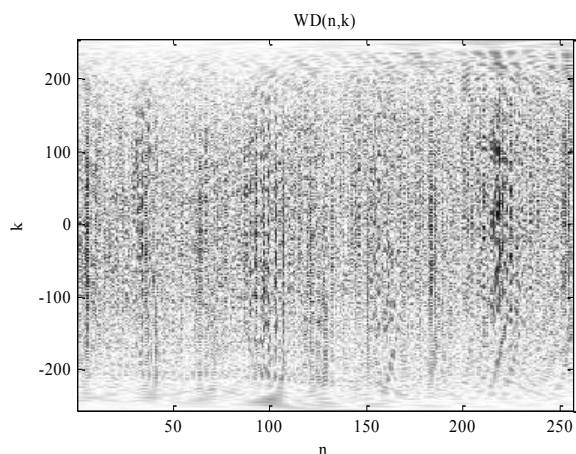
Korak 1: Za sve neophodne signale vrši se, linearna interpolacija na osnovu jednačine (10) u cilju dobijanja vrijednosti signala za necjelobrojne indekse, po ranije opisanom postupku;

Korak 2: Računa se DFT odgovarajuće kombinacije njihovih proizvoda, po formuli (5).

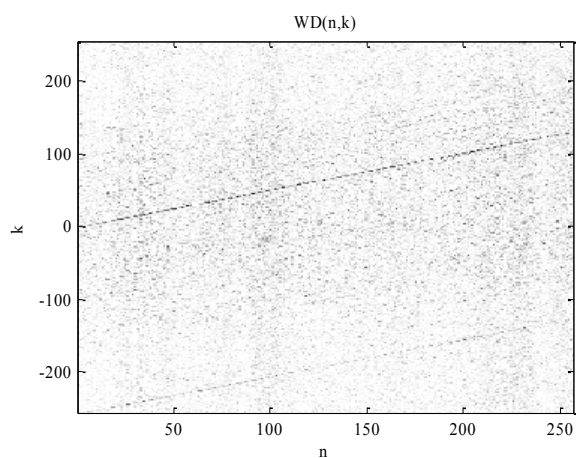
Ovdje je potrebno istaći da se u slučaju zašumljenih odbiraka analiziranog signala $x(n)$ nakon primjene svih navedenih interpolacionih tehnika vrši i interpolacija vrijednosti šuma, koje u ovim slučajevima postaju korelisane, pa stoga i interesantne za robustnu analizu (obojeni šum).

4. NUMERIČKI REZULTATI

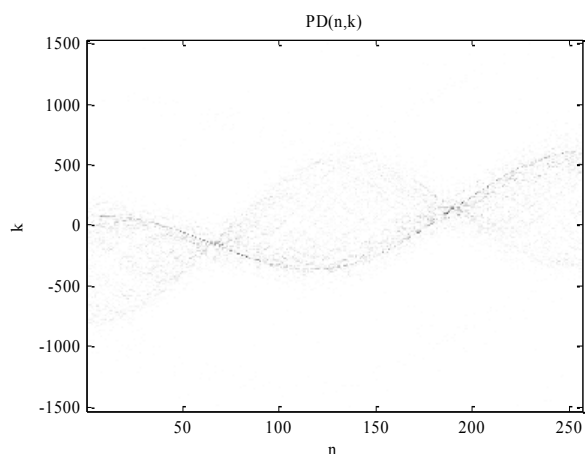
U primjerima koji slijede korišćene su reprezentacije relazovane prethodno opisanim interpolacionim tehnikama. Dostupne su samo vrijednosti diskretnog signala, i nije moguće promijeniti periodu odabiranja.



Slika 1. WD zašumljenog signala iz primjera 1.



Slika 2. WD zašumljenog signala iz primjera 1 implementirana primjenom median tehnike

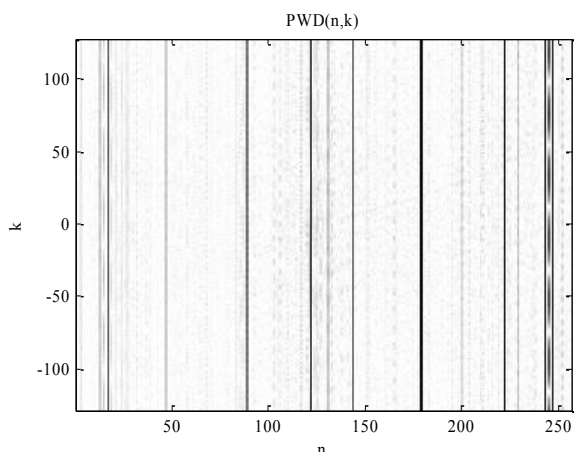


Slika 3. Polinomijalna reprezentacija višeg reda zašumljenog signala iz primjera 2, korišćenjem median pristupa

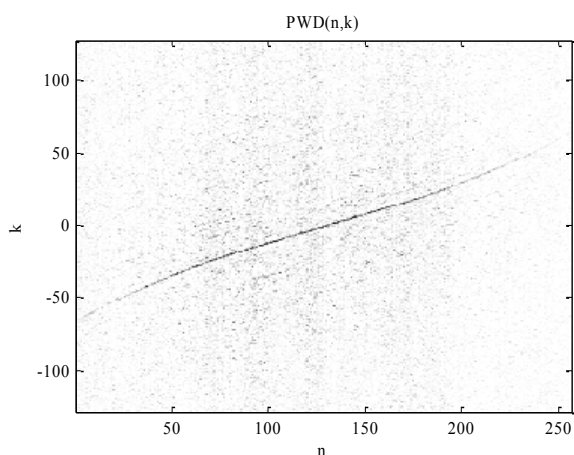
Primjer 1. Odbirci diskretnog signala $x(n)$ dobijeni su odabiranjem analognog signala $x(t)$:

$$x(t) = \exp(-j1000\pi t^2),$$

sa periodom odabiranja $\Delta t = 0.001$ koji je posmatran u intervalu od 0ms do 0.256ms.



Slika 5. Polinomijalna WD zašumljenog signala iz primjera 3.



Slika 6. PWD iz primjera 3 dobijena median pristupom.

Signal $x(n)$ je zašumljen kompleksnim aditivnim šumom: $v(n) = (0.9n_1(n))^3 + j(0.9n_2(n))^3$, gdje su $n_1(n)$ i $n_2(n)$ dva realna, statistički nezavisna bijela Gauss-ova šuma jedinične varijanse. Na slici 1. prikazana je klasična Wigner-ova distribucija zašumljenog signala $x(n)$. Slika 2. Prikazuje Wigner-ovu distribuciju signala $x(n)$ implementiranu median tehnikom.

Primjer 2. Odbirci diskretnog signala $x(n)$ dobijeni su odabiranjem analognog signala $x(t)$:

$$x(t) = \exp(-j3\pi(3\sin(8\pi t) + 9\cos(2.5\pi t))),$$

sa periodom odabiranja $\Delta t = 0.001$, koji je posmatran u intervalu od -0.128 ms do 0.127 ms. Signal $x(n)$ je zašumljen kompleksnim aditivnim šumom: $v(n) = (0.3n_1(n))^3 + j(0.3n_2(n))^3$. Slika 3 prikazuje polinomijalnu reprezentaciju višeg reda, PD, sa median pristupom.

Primjer 3. Odbirci diskretnog signala $x(n)$ dobijeni su odabiranjem analognog signala $x(t)$:

$$x(t) = \exp(-j1500\pi t^4 + j150\pi t^2),$$

sa periodom odabiranja $\Delta t = 0.001$, koji je posmatran u intervalu od -1.28 ms do 1.28 ms. Signal $x(n)$ je zašumljen kompleksnim aditivnim šumom: $v(n) = (0.7n_1(n))^3 + j(0.7n_2(n))^3$. Na slici 3. prikazana je polinomijalna Wigner-ova distribucija zašumljenog signala $x(n)$. Slika 4. Prikazuje polinomijalnu Wigner-ovu distribuciju signala $x(n)$ implementiranu sa median tehnikom. Numerički rezultati su pokazali da je srednja kvadratna greška u računanju PWD primjenom linearne interpolacije u odnosu na njene prave teorijske vrijednosti 0.2159 .

5. ZAKLJUČAK

U radu je razmatrana problematika numeričke implementacije Wignerove, polinomijalne Wigner-ove distribucije i polinomijalne reprezentacije višeg reda primjenom tehnika za interpolaciju. U primjerima su prikazani rezultati primjenom standardnih i robustnih formi implementiranih reprezentacija u uslovima kombinovanog impulsnog i bijelog Gauss-ovog šuma.

LITERATURA

- [1] Lj. Stanković, M. Daković, T. Thayaparan: "Time-Frequency Signal Analysis with Applications", Artech house, 2013.
- [2] L. Cohen: „Time-Frequency distributions-a review“ Proc. IEEE, vol 77, no. 7, July 1989, pp. 941-981
- [3] B. Boashash; B. Ristic: "Polynomial Wigner-Ville distributions and time-varying higher-order spectra", Proceedings of the IEEE-SP International Symposium , pp.31-34, 4-6 Oct 1992
- [4] I. Djurović, LJ. Stanković: „Robust Wigner Distribution with application to the instantaneous frequency estimation“, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol.49, No.12, Dec. 2001, pp. 2985-2993
- [5] I. Djurović, LJ. Stanković, J. F. Böhme: „Robust L-Estimation based forms of signal transforms and Time-Frequency representations“, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 51, No. 7, July 2003, pp. 1753-1761
- [6] I. Djurović, LJ. Stanković: „Realisation of the Robust Filters in Frequency Domain“, IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 9, No. 10, Oct 2002, pp. 333-335
- [7] I. Djurović: „Robust adaptive local polynomial Fourier transform“ IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 11, No. 2, Feb. 2004, pp. 201-204
- [8] M. Brajović, M. Daković, Lj. Stanković: „Vremensko-rekvencijska transformacija višeg reda zasnovana na aproksimaciji prvog izvoda faze“, konferencija „ETRA“ 2012
- [9] LJ. Stanković: „Digitalna obrada signala“, Naučna knjiga, 1990.